第 4 章　狭义相对论

一　运动学问题

洛伦兹变换

· 两个平行惯性系 K 和 K'，$\boxed{K'\text{ 相对 } K \text{ 沿 } x \text{ 轴方向以速度 } u \text{ 运动，且 } t=t'=0 \text{ 时两原点重合}}$

· 同一个事件在 K 系和 K' 系发生的时空坐标分别为 (x,y,z,t) 和 (x,y,z,t)，则两者存在关系

洛伦兹变换

$$\boxed{x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}}\qquad y'=y\qquad z'=z\qquad \boxed{t'=\frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}}$$

1. **双事件时空间隔问题**

· 设 K 系发生两个事件，时空坐标分别为 Ⅰ(x_1, y_1, z_1, t_1)，Ⅱ(x_2, y_2, z_2, t_2)

在 K' 系中，这两个事件的时空坐标为 Ⅰ(x_1', y_1', z_1', t_1')，Ⅱ(x_2', y_2', z_2', t_2')

则由洛伦兹变换：

双事件时空间隔

$$\boxed{t_2'-t_1'=\frac{(t_2-t_1)-u(x_2-x_1)/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}}\qquad \boxed{x_2'-x_1'=\frac{(x_2-x_1)-u(t_2-t_1)}{\sqrt{1-u^2/c^2}}}$$

· 若 $x_1=x_2$，则 t_2-t_1 称为“原时”，且必有 $t_2'-t_1'>t_2-t_1$（**原时最短**）

· 将 u 改成 $-u$ 就能得到反向的关系式

双事件时空间隔

$$\boxed{t_2-t_1=\frac{(t_2'-t_1')+u(x_2'-x_1')/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}}\qquad \boxed{x_2-x_1=\frac{(x_2'-x_1')+u(t_2'-t_1')}{\sqrt{1-u^2/c^2}}}$$

例 1　（19–20，5）地球上某地先后受到两个雷击，时间间隔 1s。在相对地球沿两雷击连线方向作匀速直线运动的飞船中测量，这两个雷击相隔 2s。则这两个雷击在飞船参照系中的空间间隔为______。

解　由已知条件，设第一个雷击为事件Ⅰ，第二个雷击为事件Ⅱ：

地球上某地先后受到两个雷击 → $x_2-x_1=0$　　时间间隔 1s → $t_2-t_1=1\text{s}$

飞船中测量两个雷击相隔 2s → $t_2'-t_1'=2\text{s}$

代入双事件时空间隔的两条式子，联立，解得 $u=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$，$x_2'-x_1'=-\sqrt{3}c$

例 2　（13–14，5）一火箭固有长度为 L，相对于地面作匀速直线运动的速度为 v_1，火箭上有一个人从火箭的后端向火箭前端上的一个靶子发射一颗相对于火箭的速度为 v_2 的子弹。在地面上测得子弹从射出到击中靶的时间间隔为____________。（用 c 表示真空中光速）

解　设地面观测系 K，火箭观测系 K'，发射子弹为事件Ⅰ，子弹命中为事件Ⅱ

则根据题干：火箭固有长度为 L → $x_2' - x_1' = L$

相对火箭速度 v_2 → $t_2' - t_1' = L / v_2$

则地面上测得的时间间隔 $t_2 - t_1 = \dfrac{L / v_2 + v_1 L / c^2}{\sqrt{1 - v_1^2 / c^2}}$

双事件问题总结

- 确定两个参考系 K 和 K'
- 提取出两个事件，并将已知条件与 $x_2 - x_1$ 等相匹配、联系
- 使用合适的方程，求解得到剩余的未知量（大概就是题目要求的东西）

2. **长度测量问题**

- 长度测量问题实质上也是双事件问题，只不过它的两个事件比较抽象，难以提取
- 设一根杆**静止**于 K 中，沿 x 轴方向放置，$x_2 - x_1 = l_0$（**固有长度 / 静长**），则在 K' 系中测得长度 l'：

杆长测量

$$\boxed{l' = l_0 \sqrt{1 - u^2 / c^2}}$$

- 不管是运动系观测静止杆还是静止系观测运动的杆，都可以使用

例 3 （17–18，5）一门宽为 a，今有一固有长度为 l_0（$l_0 > a$）的水平细杆，在门外贴近门的平面内沿长度方向匀速运动。若站在门外的观察者认为此杆的两端可同时被拉进此门，则该杆相对于门的运动速率 u 至少为____________。

解 该题目的意思是，门和杆都是沿着 x 轴的，问杆运动的速率多大时，静止系 K 中测得的杆长 l 小于门宽 a。设杆的运动速率为 u，则可以视为观测系 K 相对于杆以速度 $-u$ 运动，则测得的杆长为 $l_0 \sqrt{1 - u^2 / c^2} \le a$，解得 $u \ge c\sqrt{1 - a^2 / l_0^2}$

例 4 （14–15，3）在 O 参考系中，有一个静止的正方形，其面积为 100cm^2，观测者 O' 以 $0.8c$ 的匀速度沿正方形的对角线运动。则观测者 O' 所测得的该图形的面积为____________。

解 这是一个长度测量问题。运动时，观测到的对角线长度 Δx 发生变化，但依然与另一条对角线垂直，且另一条对角线长度不变。此时的图形为菱形，面积为 $\frac{1}{2}\Delta x' \Delta y$。因此

$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - u^2 / c^2} = 0.6\Delta x$。原来的正方形面积 $\frac{1}{2}\Delta x \Delta y = 100$，则菱形面积为 $100\dfrac{\Delta x'}{\Delta x} = 60\text{cm}^2$

二　动力学问题

1. **质量问题**

运动物体的质量

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}}$$

· m：物体以速度 v 运动时的质量　　m_0：物体在相对静止参照系中的质量（**静止质量**）

例 5　（10−11，6）一匀质矩形薄板，在它静止时测得其长为 a，宽为 b，质量为 m_0。由此可算出其面积密度为 m_0/ab。假定该薄板沿长度方向以接近光速的速度 v 作匀速直线运动，此时再测算该矩形薄板的面积密度则为__________。

解　高速运动时，薄板的面积和质量都会发生变化：沿长度方向运动，使得测量到的长度 $a' = a\sqrt{1-v^2/c^2}$，质量 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，因此面积密度 $\sigma' = \dfrac{m'}{a'b} = \dfrac{m_0}{ab(1-v^2/c^2)}$

2. **能量\动能\动量问题**

静止物体的能量	运动物体的能量	运动物体的动能	运动物体的动量
$\boxed{E_0 = m_0c^2}$	$\boxed{E = mc^2}$	$\boxed{E_k = mc^2 - m_0c^2}$	$\boxed{p = mv}$

例 6　（19−20，6）设某微观粒子的总能量是它的静止能量的 K 倍，则其运动速度大小为为__________。

解　设运动速度 v，则总能量 $E = mc^2 = Km_0c^2 \rightarrow m = Km_0$

由于 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，因此解得 $v = c\sqrt{1-1/K^2}$

例 7　（14−15，5）当粒子的相对论动量是非相对论动量的两倍时，其速度大小为__________；当粒子的动能等于其静止能量时，其速度大小为__________.

解　第一空：相对论动量 $p = mv = \dfrac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，非相对论动量 $p_0 = m_0v$

因此 $\dfrac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 2m_0v$，解得 $v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$

第二空：动能 $E_k = mc^2 - m_0c^2$，静止能量 $E_0 = m_0c^2$，于是 $mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \rightarrow m = 2m_0$

由于 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，解得 $v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$

例 8　（13−14，6）当已知 μ 子的静止能量为 105.7MeV，平均寿命为 2.2×10^{-8}s。则动能为 150MeV 的 μ 子的速度 v 为__________.（用 c 表示），平均寿命 $\tau =$__________s。

解　第一空：$E_k = mc^2 - m_0c^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)m_0c^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)\times 105.7\text{MeV} = 150\text{MeV}$

解得 $v = 0.91c$

第二空：将 μ 子的形成和消失视为事件 Ⅰ 和 Ⅱ，则 $x_2 - x_1 = 0$，$t_2 - t_1 = \tau_0$

则 $\tau = t_2' - t_1' = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 5.32\times10^{-8}\text{s}$